4次元ユークリッド空間内の共形平坦な超曲面の新しい例 (リーマン部分多様体の総合的研究)

陶山, 芳彦

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 186-208

4次元ユークリッド空間内の共形平坦な超曲面の新しい例

福岡大学・理学部　陶山 芳彦 (Yoshihiko Suyama)
Department of Applied Mathematics, Fukuoka University

概要. この論文では、4次元ユークリッド空間内の generic で共形平坦な超曲面について考察する。また、この論文の主たる目的は、2001年に数理解析研究所で行われた研究集会 “部分多様体の微分幾何およびその周辺領域の研究 (講究録 1236 ([7])) ” で報告した内容のその後の進展について報告することである。特に、その進展した内容の中でも、次の2つの内容 (1) と (2) が (一般的には) 興味深いものであると思われるので、この部分についてのみ記述することにする。

(1) 今まで知られていなかった generic で共形平坦な超曲面を具体的に構成する方法。

(2) 同じ共形不変量 ([7] で与えたもの) を持つが、共形的に同値とならない generic で共形平坦な超曲面の組を構成する事。

ところで、このような超曲面の構成の一部は [8] で既に報告していたのだが、本研究集会の後で梅原雅顕さんと話をしていて、気が付いたことがあった。それは、[8] では、この論文の §2 の (2.1) の形の計量のみを考えていたのだが、§3 の (3.1) の形の計量も考えなければいけないということである。§3 で述べた定理の証明は §2 の定理の証明とほとんど同様であるが、この論文では丁寧に証明を付けた。

また、内容 (2) は今回の講演では話さなかったもので、この報告をまとめていて気が付いたものである。

1. 序文.

この論文では、4次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内の generic で共形平坦な超曲面の新しい一連の例を具体的に構成する。また同時に、ある種の共形不変量は一致するが、$\mathbf{R}^4$ の共形変換で移りあわないような generic で共形平坦な超曲面の組も構成する。

超曲面が generic であるとは、その超曲面上の各点で全ての主曲率が互いに異なる場合をいう。4次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内の generic で共形平坦な超曲面に関する Cartan の定理により、超曲面の各点で (直交する) 主曲率線を座標関数とする座標系をとる事が出来る。このような座標系を、共形平坦な超曲面の “admissible coordinate system ” と呼ぶ事にする。この時、admissible coordinate system $\{x^1, x^2, x^3\}$ によって、第一基本形式 g と第二基本形式 s は、それぞれ次の様に書き表す事が出来る：

$$g = e^{2P(x)}\{e^{2f(x)}(dx^1)^2 + e^{2h(x)}(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, \tag{1.1}$$

ここで、 $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$、 $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$、 $h(x) = h(x^1, x^2, x^3)$。

$$s = e^{2P(x)}\{e^{2f(x)}\lambda(x)(dx^1)^2 + e^{2h(x)}\mu(x)(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}, \tag{1.2}$$

ここで $\lambda(x)$, $\mu(x)$ と $\nu(x)$ は、それぞれ、x^1-曲線、 x^2-曲線 と x^3-曲線に対応する主曲率である。また、g のリーマン曲率はこの座標系により対角化される。

さて、(1.1) の計量 g のリーマン曲率が対角化されることにより、計量 g に対して次を満たす関数 $\psi = \psi(x^1, x^2, x^3)$ が存在する： 関数 f の x^i に関する偏導関数を f_i で表わし、2 階偏導関数 $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$ を f_{ij} で表わすことにする。

$$\psi_{12} = (P+f)_2(P+h)_1 - P_{12}, \quad \psi_{13} = (P+f)_3 P_1 - P_{13}, \tag{1.3}$$
$$\psi_{23} = (P+h)_3 P_2 - P_{23}.$$

この時、関数 ψ は本質的に一意に定まり、この関数 ψ は共形平坦な超曲面 (あるいは、その計量) に関する共形不変量と考えられる。ここでいう共形不変量とは、$\mathbf{R}^4$ (resp. S^4) の共形変換の作用によって変わらない量のことである。また更に、この不変量は共形平坦な超曲面の計量と共形的な平坦計量まで含めた計量の集合の上での共形不変量として捉えることが出来る。但し、計量 (1.1) の表し方は一意ではないので、今のところこの不変量は弱い意味で考えている。

更に、リーマン曲率が対角化されることより、次の式も成り立つ：

$$\psi_{12} = f_2 h_1, \quad \psi_{13} = h_{13} - h_1(f-h)_3, \quad \psi_{23} = f_{23} + f_2(f-h)_3. \tag{1.4}$$

また、ψ の可積分条件から次の式を得る：

$$(f-h)_{123} + [(f-h)_3 f_2]_1 + [(f-h)_3 h_1]_2 = 0. \tag{1.5}$$

$$h_{123} - [f_2 h_1]_3 - [(f-h)_3 h_1]_2 = 0. \tag{1.6}$$

$$f_{123} - [f_2 h_1]_3 + [(f-h)_3 f_2]_1 = 0. \tag{1.7}$$

Hertrich-Jeromin は、generic で共形平坦な超曲面には各点でより強い条件を満たす admissible coordinate system が存在する事を証明した。即ち、そのような admissible coordinate system $\{x^1, x^2, x^3\}$ によって、第一基本形式 (1.1) は

$$g = e^{2P(x)}\{(\cos\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (\sin\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (dx^3)^2\} \tag{1.8}$$

あるいは、

$$g = e^{2P(x)}\{(\cosh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (\sinh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (dx^3)^2\} \tag{1.9}$$

と表わされる、ここで $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$ であり $\varphi(x) = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ である。(1.8) において、$e^{2P(x)} \sin^2\varphi(x)$ を改めて $e^{2P(x)}$ と置けば、座標関数 x^1、x^2、x^3 をそれぞれ x^2、x^3、x^1 に置き換えることにより (1.9) が得られる。彼はこのような座標系を Guichard net と呼んだ。例えば、計量 (1.1) と (1.8) を比べれば、(1.1) では 2 つの未知関数 f と h を必要とした部分が (1.8) では 1 つの関数 φ だけで表される事になる。この Hertrich-Jeromin の結果と前に述べたことにより、2 つの関数の組 $\{\psi, \varphi\}$ は、計量をそれぞれ (1.8) あるいは (1.9) と表したときの共形平坦な超曲面 (あるいは、その計量) の共形不変量となる事を注意しておく。

Guichard net $\{x^1, x^2, x^3\}$ により、(1.3)、(1.4)、(1.5)、(1.6) と (1.7) で与えた方程式

は次のように書き直す事が出来る：

計量 (1.8) の場合は、

$$\psi_{12} = -\varphi_1\varphi_2, \quad \psi_{13} = \varphi_{13}\cot\varphi, \quad \psi_{23} = -\varphi_{23}\tan\varphi. \tag{1.10}$$

$$\varphi_{123} = -\varphi_1\varphi_{23}\tan\varphi + \varphi_2\varphi_{13}\cot\varphi. \tag{1.11}$$

計量 (1.9) の場合は、$(\tanh\varphi)^{-1}$ を $\coth\varphi$ と表す時、

$$\psi_{12} = \varphi_1\varphi_2, \quad \psi_{13} = \varphi_{13}\coth\varphi, \quad \psi_{23} = \varphi_{23}\tanh\varphi. \tag{1.12}$$

$$\varphi_{123} = \varphi_1\varphi_{23}\tanh\varphi + \varphi_2\varphi_{13}\coth\varphi. \tag{1.13}$$

古典的に知られている generic で共形平坦な超曲面の第一基本形式は、3 つ方程式 $\varphi_1 = 0$、$\varphi_2 = 0$ 、$\varphi_3 = 0$ のいずれかを満たしている。逆に、第一基本形式がこれら 3 つの方程式の 1 つを満たしているような generic で共形平坦な超曲面は、$\mathbf{R}^4$ (resp. S^4) の共形変換の作用で古典的に得られている超曲面に移る。

この論文では、第一基本形式 (1.8) と (1.9) において $P = P(x^3)$ となるような古典例に属さないすべての超曲面を決定する。仮定 $P = P(x^3)$ と (1.3) から、$\psi_{13} = \psi_{23} = 0$ となり、更に、(1.10) と (1.12) より $\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$ が成り立つ。方程式 $\varphi_1 \neq 0$、$\varphi_2 \neq 0$ 、$\varphi_3 \neq 0$ が成り立ち、かつ $\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$ を満たす $\mathbf{R}^4$ 内の generic で共形平坦な超曲面が存在するならば、このような超曲面は今まで知られていなかった新しい例となる。さて、仮定 $\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$ は、関数 φ が

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) \ = \ A(x^1, x^2) \ + \ B(x^3) \tag{1.14}$$

と表わされる事と同値である。

§2 では計量が (1.8) で表され、更に $P = P(x^3)$ となるような超曲面を、§3 では計量が (1.9) で表れされる同様の超曲面を調べる。

2. $\mathbf{R}^3$ 或いは球面 S^3 内の負の定曲率曲面から作られる共形平坦な超曲面 .

この節では、第一基本形式 g が

$$g = e^{2P(x)}\{(\cos\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (\sin\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (dx^3)^2\} \tag{2.1}$$

と表され、更に $P = P(x^3)$ となる場合の古典例に属さない $\mathbf{R}^4$ 内の generic で共形平坦な超曲面の存在に関する結果を述べる。ここで述べる結果と内容で証明のない部分は論分 [8] を参照されたい。

仮定より、関数 $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ は

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3) \tag{2.2}$$

と表される。

先ず、$\mathbf{R}^3$ の標準的平坦計量が (2.1) の形に表わされ (関数 P は $P = P(x^3)$ となるわけではない)、この時の関数 $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ が (2.2) で与えられる $\mathbf{R}^3$ (あるいは $\mathbf{R}^3$ の開集合) 上の全ての座標系 (net) $\{x^1, x^2, x^3\}$ を求めよ、という問題を考える。このような $\mathbf{R}^3$ の座標系を Guichard net という。

定理 2.1. *$\{x^1, x^2, x^3\}$ を $\boldsymbol{R}^3$ (あるいは $\boldsymbol{R}^3$ の開集合) の Guichard net とし、$\boldsymbol{R}^3$ の標準的平坦計量 g がこの net によって (2.1) の形に表わされているとする。更に、不等式 $A_1 \neq 0$ あるいは $A_2 \neq 0$ の少なくとも 1 つが成り立つ関数 $A(x^1, x^2)$ と、$B_3 \neq 0$ となる関数 $B(x^3)$ により、関数 φ が次のように表わされていると仮定する:*

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3). \tag{2.3}$$

この時、次の主張 (1)、(2)、(3) 及び (4) が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{R}^3$ での各 x^3- 曲線は円弧である。

(2) 関数 $A(x^1, x^2)$ は Sine-Gordon 方程式を満たす:

$$A_{11} - A_{22} = (E^2/2)\sin(2A),$$

ここで E は正の定数である。

(3) 関数 $B(x^3)$ は次の方程式で与えられる:

$$B_3(x^3) = \sqrt{G^2 - E^2 (\sin B(x^3))^2},$$

ここで G は定数である。即ち、$B(x^3)$ は振幅関数 (楕円関数) である。

(4) 特に (3) において $G^2 = E^2$ と仮定する。この時の Guichard net は、$\boldsymbol{R}^3$ 内の負の定曲率曲面からの平行曲面から作られているか、あるいはその平行曲面の共形変換によって作られている。

定理 2.1-(2) の Sine-Gordon 方程式で右辺の $\sin(2A)$ の係数は E^2 と正に取ったが、この係数 E^2 は負に取ってもよい。しかし、負にした場合には、座標関数 x^1 と x^2 を入れ替えることにより、その係数は正に出来る。従って、定理 2.1-(2) の形で述べた。

次に、定理 2.1 で得られた関数 $\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3)$ から、generic で共形平坦な超曲面を構成する (定理 2.4 と定理 2.5)。このための準備として、次の定理 2.2 と定理 2.3 が必要である。

定理 2.2. *$\boldsymbol{R}^4$ 内に埋め込まれた曲面 $S : (x^1, x^2) \mapsto \mathbf{f}(x^1, x^2) \in \boldsymbol{R}^4$ に対し、S の normal bundle の正規直交標構 $\{\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}\}$ で、*

$$\mathbf{n}_1 = \kappa_1(x^1, x^2)\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{n}_2 = \kappa_2(x^1, x^2)\mathbf{f}_2,$$

$$\bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\kappa}_1(x^1, x^2)\mathbf{f}_1, \quad \bar{\mathbf{n}}_2 = \bar{\kappa}_2(x^1, x^2)\mathbf{f}_2$$

を満たすものが存在するとする、ここで $\kappa_i(x^1,x^2)$ と $\bar{\kappa}_i(x^1,x^2)$ は S の主曲率である。更に、このような曲面 S とある *2* つの関数 $l(x^3)$, $m(x^3)$ *(*$l(0)=m(0)=0$*)* から $\boldsymbol{R}^4$ 内の超曲面 $\mathbf{p}:(x^1,x^2,x^3)\mapsto \mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)\in\boldsymbol{R}^4$ が次の形で作られているとする：

$$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)=\mathbf{f}(x^1,x^2)+l(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2)+m(x^3)\bar{\mathbf{n}}(x^1,x^2). \tag{2.4}$$

この時、$(l(x^3),x(x^3))$ が $\boldsymbol{R}^2$ の直線ではなく、またこの超曲面 $\mathbf{p}$ の第一基本形式が、定理 *2.1* で与えられた関数 $A=A(x^1,x^2)$ と $B=B(x^3)$ *(*$B(0)=0$*)* を使って

$$e^{2P(x^3)}\{\cos^2(A+B)(dx^1)^2+\sin^2(A+B)(dx^2)^2+(dx^3)^2\} \tag{2.5}$$

で与えられるならば、初めの曲面 S は $\boldsymbol{R}^3$ の曲面であるか、あるいは S^3 に含まれている曲面である。

証明. 先ず、写像 $\mathbf{p}(x^1,x^2,0)$ を考える。この時 $\mathbf{p}_1=\mathbf{f}_1$、$\mathbf{p}_2=\mathbf{f}_2$. 故に、写像 $\mathbf{f}$ の第一基本形式は $e^{2P(0)}\{\cos^2 A(dx^1)^2+\sin^2 A(dx^2)^2\}$ である。$e^{P(0)}\mathbf{f}(x^1,x^2)$ を改めて $\mathbf{f}(x^1,x^2)$ とおけば、$e^{P(0)}=1$ としてよい。また、このことより $(l_3^2+m_3^2)(0)=1$ と仮定できる。

次に、$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)$ の定義より

$$\|\mathbf{p}_1\|^2=(1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1)^2\cos^2 A, \tag{2.6}$$

$$\|\mathbf{p}_2\|^2=(1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2)^2\sin^2 A,\quad \|\mathbf{p}_3\|^2=l_3^2+m_3^2$$

となる。以下簡単のため、$\cos A\geq 0$, $\sin A\geq 0$, $(1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1)\geq 0$, $(1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2)\geq 0$ を仮定する。(2.5) と (2.6) より、

$$\cos(A+B)=\frac{1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}\cos A,\quad \sin(A+B)=\frac{1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}\sin A \tag{2.7}$$

成り立つ。

(2.7) 式より、

$$\cos B-\frac{1}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}=\frac{l}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\kappa_1\cos^2 A+\kappa_2\sin^2 A)+\frac{m}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\bar{\kappa}_1\cos^2 A+\bar{\kappa}_2\sin^2 A) \tag{2.8}$$

及び

$$\sin B=\sin A\cos A\{\frac{l}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\kappa_2-\kappa_1)+\frac{m}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\bar{\kappa}_2-\bar{\kappa}_1)\} \tag{2.9}$$

を得る。(2.8) 式で、左辺と $l/\sqrt{l_3^2+m_3^2}$, $m/\sqrt{l_3^2+m_3^2}$ は x^3 のみの関数であり、また $(l(x^3),m(x^3))$ は直線ではないことより、定数 C_1 と C_2 が存在して

$$(\kappa_1\cos^2 A+\kappa_2\sin^2 A)=C_1,\quad (\bar{\kappa}_1\cos^2 A+\bar{\kappa}_2\sin^2 A)=C_2 \tag{2.10}$$

となる。同様に (2.9) より、定数 C_3 と C_4 が存在して

$$\sin A\cos A(\kappa_2-\kappa_1)=C_3,\quad \sin A\cos A(\bar\kappa_2-\bar\kappa_1)=C_4 \tag{2.11}$$

が成り立つ。(2.10) と (2.11) より、

$$\kappa_1=C_1-C_3\tan A,\quad \kappa_2=C_1+C_3\cot A,$$

$$\bar\kappa_1=C_2-C_4\tan A,\quad \bar\kappa_2=C_2+C_4\cot A$$

を得る。(ここで、仮に $C_3=0$ とすれば、ある定ベクトル $\mathbf{a}$ が存在して $\mathbf{n}=\mathbf{a}+C_1\mathbf{f}$ となる。故に、$<\mathbf{a}+C_1\mathbf{f},\mathbf{f}_i>=<\mathbf{n},\mathbf{f}_i>=0$ $(i=1,2)$ より、$\|\mathbf{a}+C_1\mathbf{f}\|=$ 一定 となり、曲面 $\mathbf{f}$ は球面に属する。故に、以下 $C_3\neq 0,\ C_4\neq 0$ を仮定する。) 以上より

$$\mathbf{n}_1=(C_1-C_3\tan A)\mathbf{f}_1,\quad \mathbf{n}_2=(C_1+C_3\cot A)\mathbf{f}_2, \tag{2.12}$$

$$\bar{\mathbf{n}}_1=(C_2-C_4\tan A)\mathbf{f}_1,\quad \bar{\mathbf{n}}_2=(C_2+C_4\cot A)\mathbf{f}_2 \tag{2.13}$$

が得られる。(2.12) と (2.13) より、$i=1,\ 2$ として

$$(C_4\mathbf{n}-C_3\bar{\mathbf{n}})_i=(C_1C_4-C_2C_3)\mathbf{f}_i \tag{2.14}$$

が成り立つ。(2.14) 式で $(C_1C_4-C_2C_3)=0$ となるならば、曲面 S は定ベクトル $(C_4\mathbf{n}-C_3\bar{\mathbf{n}})$ に直交する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面である。

次に $(C_1C_4-C_2C_3)\neq 0$ の場合を調べる、簡単のため、$(C_1C_4-C_2C_3)=1$ と仮定する。(2.14) より、ある定ベクトル $\mathbf{a}$ が存在して $C_4\mathbf{n}-C_3\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{a}+\mathbf{f}$ となる。$<C_4\mathbf{n}-C_3\bar{\mathbf{n}},\mathbf{f}>=<\mathbf{a},\mathbf{f}>+<\mathbf{f},\mathbf{f}>$ の両辺を x^i $(i=1,\ 2)$ で微分して

$$<\mathbf{f}_i,\mathbf{f}>+<C_4\mathbf{n}-C_3\bar{\mathbf{n}},\mathbf{f}_i>=<\mathbf{a},\mathbf{f}_i>+2<\mathbf{f}_i,\mathbf{f}> \tag{2.15}$$

を得る。$\mathbf{n}$ と $\bar{\mathbf{n}}$ は曲面 S の法ベクトルだから、(2.15) より $<\mathbf{a}+\mathbf{f},\mathbf{f}_i>=0$、即ち

$$<\mathbf{a}+\mathbf{f},\mathbf{a}+\mathbf{f}>=\text{一定}$$

となる。こうして、曲面 S は $(-\mathbf{a})$ を中心とする球面 S^3 に含まれる。 q.e.d.

定理 2.1、定理 2.2 と [8] の定理 5.2-(3.II) より、$P=P(x^3)$ となる計量 (2.1) を持ち古典型に含まれない generic で共形平坦な超曲面が存在するならば、それらの超曲面は計量 $\cos^2 A(dx^1)^2+\sin^2 A(dx^2)^2$ を持つ $\mathbf{R}^3$ あるいは S^3 の曲面から定理 2.2 に述べた方法で作られていなければならない。

次に " 定理 2.1 で求めた関数 $A(x^1,x^2)$ に対して、次の条件 (1)、(2) を満たす $\mathbf{R}^3$ あるいは S^3 内の曲面の存在問題を考える：(1) 上の形量を持つ。(2) 定理 2.2 の条件を満たす normal bundle の正規直交標構が存在する。

定理 2.3. 定理 *2.1-(2)* で与えられた関数 $A(x^1, x^2)$ に対して、 $\boldsymbol{R}^3$ あるいは半径 1 の球面 S^3 内の曲面 S が存在して、その第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ が、それぞれ次の形で与えられていると仮定する：

$$\hat{g} = \cos^2 A(dx^1)^2 + \sin^2 A(dx^2)^2. \tag{2.16}$$

$$\hat{s} = s_{11}(dx^1)^2 + s_{22}(dx^2)^2, \tag{2.17}$$

ここで、s_{ii} *(*$i = 1,\ 2$*)* は x^1 と x^2 の関数である。

この時、関数 A の定義における定数 $E^2 > 0$ は任意であり、$\boldsymbol{R}^3$ あるいは S^3 内の曲面の第二基本形式については、それぞれ次が成り立つ*:*

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面の第二基本形式：

$$\hat{s} = E \sin A \cos A\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}.$$

(2) S^3 内の曲面の第二基本形式：

$$\hat{s} = \sqrt{E^2+1} \sin A \cos A\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}.$$

証明. 計量 $\hat{g}$ の曲率 K は

$$K = -(A_{11} - A_{22})/(\sin A \cos A) = -E^2 \tag{2.18}$$

である。

$$s_{11} = Ea(x^1, x^2)\cos^2 A, \quad s_{22} = Eb(x^1, x^2)\sin^2 A \tag{2.19}$$

とおく。S が $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の場合と半径 1 の球面 S^3 内の曲面の場合、それぞれの場合に応じて、(2.18) より

$$ab = -1, \quad or \quad ab = -1 - E^{-2} \tag{2.20}$$

が成り立つ。Coddazi の方程式

$$\partial(s_{11})/\partial x^2 = \Gamma^1_{12}s_{11} - \Gamma^2_{11}s_{22}, \quad \partial(s_{22})/\partial x^1 = -\Gamma^1_{22}s_{11} + \Gamma^2_{12}s_{22}$$

より、

$$a_2 \cos A = (a - b)A_2 \sin A, \quad b_1 \sin A = (a - b)A_1 \cos A \tag{2.21}$$

が成り立つ。この時、a と b は定理 2.2 の証明 ((2.12) と (2.13)) から、$a = a(A)$, $b = b(A)$ として求めればよい。そこで、$a' = \partial a/\partial A$, $b' = \partial b/\partial A$ と表す時、(2.21) より $(a - b)' = (a - b)(\sin A/\cos A - \cos A/\sin A)$ を得る。故に、次の式が成り立つ：C を定数として

$$(a - b) = C/(\sin A \cos A) \tag{2.22}$$

S が S^3 の曲面の時を考える。(2.20) と (2.22) より、a と $-b$ は次の t に関する 2 次式の解である:

$$t^2 - (C/\sin A\cos A)t + (1 + E^{-2}) = 0.$$

また、(2.12) と (2.13) より、a と $-b$ は根号を含まない形の $\sin A$ と $\cos A$ の関数である。故に、この 2 次式の判別式 D は平方の形で表されていなければならない：

$$D = \{C^2 - (1 + E^{-2})\sin^2(2A)\}/\sin^2 A\cos^2 A.$$

従って、$C^2 = (1 + E^{-2})$ である。($\mathbf{R}^3$ の曲面の時は、$C^2 = 1$ となる。) このことより、a と $-b$ は、$(\sqrt{E^2+1}/E)\sin A/\cos A$ と $(\sqrt{E^2+1}/E)\cos A/\sin A$ のいずれかになる。どちらであるかは、(2.21) で決まる。以上より、第二基本形式は $\hat{s}$ は

$$\hat{s} = \sqrt{E^2+1}\sin A\cos A\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}$$

となる。($\mathbf{R}^3$ の曲面の時は、

$$\hat{s} = E\sin A\cos A\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}$$

である。) q.e.d.

次に、定理 2.3 で得られた曲面から共形平坦な超曲面を構成する。

定理 2.4. 関数 $A = A(x^1, x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は、定理 *2.1-(2)* において定義されたものとする。また、S をこの関数 A によって定まる $\boldsymbol{R}^3$ 内の負の定曲率曲面とする。S の第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2,$$

$$\hat{s} = E\sin A\cos A\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}.$$

この時、曲面 S と関数 $B(x^3)$ から定理 *2.2* の方法 *(2.4)* で作られた写像 $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ が、$\boldsymbol{R}^4$ 内の *generic* で共形平坦な超曲面を定義するための条件は、$B(x^3)$ の定義において $E^2 > G^2$ が成り立つことである。

また、この時の超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線は主曲率線となる。

1 つ注意を述べる： 定理 2.4 で $A_1 = 0$ を仮定する。この時、$\mathbf{R}^3$ 内の負曲率曲面 $\mathbf{f}(x^1, x^2)$ は回転面である。従って、超曲面 $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ は回転型となり、このような超曲面は古典例に属することが分かる。

定理 2.5. 関数 $A=A(x^1,x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は、定理 *2.1-(2)* において定義されたものとする。また、S をこの関数 A によって定まる半径 1 の球面 S^3 内の負の定曲率曲面とする。S の第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\hat{g}=\cos^2 A(dx^1)^2+\sin^2 A(dx^2)^2,$$

$$\hat{s}=\sqrt{E^2+1}\sin A\cos A\{(dx^1)^2-(dx^2)^2\}.$$

この時、曲面 S と関数 $B(x^3)$ から定理 *2.2* の方法 *(2.4)* で作られた写像 $\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)$ が、$\boldsymbol{R}^4$ 内の *generic* で共形平坦な超曲面を定義するための条件は、$B(x^3)$ の定義において $E^2+1\geq G^2$ が成り立つことである。

また、この時の超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線は主曲率線となる。

証明. 曲面 S は S^3 に含まれているから、この埋め込みを $S:(x^1,x^2)\mapsto \mathbf{f}(x^1,x^2)\in S^3$ で表す。この時、埋め込み (2.4) は、$\mathbf{f}(x^1,x^2)$ が S^3 の単位法ベクトル場であるから、$\mathbf{n}(x^1,x^2)$ を S^3 における S の単位法ベクトル場とする時

$$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)=(1+l(x^3))\mathbf{f}(x^1,x^2)+m(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2)$$

と表される。また、第二基本形式の形から

$$\mathbf{n}_1=-\sqrt{E^2+1}\sin A/\cos A\ \mathbf{f}_1,\quad \mathbf{n}_2=\sqrt{E^2+1}\cos A/\sin A\ \mathbf{f}_2$$

が成り立つ。そこで、(2.7) は次の式になる：

$$\cos(A+B)=\frac{(1+l)\cos A-\sqrt{E^2+1}m\sin A}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}},$$

$$\sin(A+B)=\frac{(1+l)\sin A+\sqrt{E^2+1}m\cos A}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}.$$

故に、

$$\cos B=(1+l)/\sqrt{l_3^2+m_3^2},\quad \sin B=\sqrt{E^2+1}m/\sqrt{l_3^2+m_3^2} \tag{2.23}$$

を得る。また、逆に、(2.23) が成り立つ l と m が存在すれば、写像 $\mathbf{p}$ は generic で共形平坦な超曲面を定義する。

簡単のため、$\bar{l}=(1+l),\ C=\sqrt{l_3^2+m_3^2}$ とおく。この時、

$$m=\bar{l}\tan B/\sqrt{E^2+1},\quad \bar{l}^2+(E^2+1)m^2=C^2 \tag{2.24}$$

となる。m と $m_3=(\bar{l}_3\sin B\cos B+\bar{l}B_3)/(\sqrt{E^2+1}\cos^2 B)$ を (2.24) の第二式に代入することにより、

$$\cos^2 B(E^2\cos^2 B+1)(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}})^2+2B_3\sin B\cos B\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}}+\{B_3^2-(E^2+1)\cos^2 B\}=0$$

を得る。$(\bar{l}_3/\bar{l})$ が実解をもつ条件は、$(B_3)^2 = G^2 - E^2 \sin^2 B$ から、上の判別式 D が

$$D/4 = (E^2+1)(E^2+1-G^2)\cos^4 B$$

となることより、$E^2+1 \geq G^2$ である。また、$l(x^3)$ が決まれば、$m(x^3)$ も定まる。

定理 2.4 の場合には、$E^2 = G^2$ の時 $m_3 = 0$ となり、超曲面は出来なかった。今の場合は、$E^2+1 = G^2$ のときには $m_3 = \sqrt{E^2+1}B_3\bar{l}/(E^2\cos^2 B + 1)$ となり、この時にも超曲面は存在する。

また、超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線が主曲率線となることは、直ちに分かる。　q.e.d.

定理 2.4 と定理 2.5 から、関数 $A(x^1,x^2)$ と $B(x^3)$ が $E^2 > G^2$ を満たす定数 E^2 と G^2 によって定義されている時、これらに対応する generic で共形平坦な超曲面で、各 x^i− 曲線が主曲率線となる超曲面が 2 つ存在することがわかった。次に、この 2 つの超曲面は共形同値でないことを示す、即ち、この 2 つの超曲面は $\mathbf{R}^4$ の共形変換で移りあわない。

命題 2.1. 写像 Φ を標準平坦計量 g_E を持つユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ から標準計量 g_S を持つ球面 S^3 への単射な共形写像とする。この時、Φ がその上で等長となる $\boldsymbol{R}^3$ の集合は、ある *2* 次元球面 S^2 に含まれる。

証明. 写像 Φ により $\mathbf{R}^3$ に導入される計量 $\Phi^* g_S$ を考える。$\Phi_1:\ \mathbf{R}^3 \to S^3$ を立体射影とし、$\Phi_2:\ S^3 \to S^3$ を S^3 の共形変換とする時、$\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ である。共形変換 Φ_2 に関しては inversion $\Phi_2(y) = y/\parallel y \parallel^2$、ここで $y = \{y^1,y^2,y^3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的座標系である、の場合のみを調べれば十分である。このとき、

$$\Phi_1^* g_S = \frac{4}{(1+\parallel y \parallel^2)^2}\{(dy^1)^2+(dy^2)^2+(dy^3)^2\},\quad \Phi_2^* g_E = \frac{1}{\parallel y \parallel^4}\{(dy^1)^2+(dy^2)^2+(dy^3)^2\}$$

となる。このことより、$\Phi^* g_S = e^{2P(y)} g_E$ とおけば、$P(y) = 0$ となる集合は $\mathbf{R}^3$ のある球面 S^2 に含まれることがわかる。　q.e.d.

系 2.1. $E^2 > G^2$ とする。この時、関数の組 $\{A(x^1,x^2), B(x^3)\}$ から定義される *(定理 2.4 と定理 2.5 で述べた) 2 つの generic* で共形平坦な超曲面は、共形的に異なる超曲面である。

証明. 定理 2.4 で定義された超曲面を $\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)$、定理 2.5 で定義された超曲面を $\bar{\mathbf{p}}(x^1,x^2,x^3)$ で表すことにする。この時、

$$\mathbf{p} = (\mathbf{f}(x^1,x^2) + l(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2), m(x^3)),\quad \bar{\mathbf{p}} = (1+\bar{l}(x^3))\bar{\mathbf{f}}(x^1,x^2) + \bar{m}(x^3)\bar{\mathbf{n}}(x^1,x^2).$$

写像 $\mathbf{p}$, $\bar{\mathbf{p}}$ に対する $\mathbf{n}$ と l, m の定義から、次の式が成り立つ：

$$\mathbf{p}_1 = (1-\tan A\tan B)\mathbf{f}_1,\quad \mathbf{p}_2 = (1+\cot A\tan B)\mathbf{f}_2,$$

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = (1+\bar{l}(x^3))(1-\tan A \tan B)\bar{\mathbf{f}}_1, \quad \bar{\mathbf{p}}_2 = (1+\bar{l}(x^3))(1+\cot A \tan B)\bar{\mathbf{f}}_2.$$

各 x^3 を固定した時、写像 $\mathbf{p}$ に現れる写像 $\mathbf{f}(x^1,x^2)+l(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2)$ は $\mathbf{R}^3_{x^3}$ に、写像 $\bar{\mathbf{p}}$ は $S^3_{x^3}$ に、それぞれ入っている曲面を定める。更に、それぞれの場合において、それらの $\mathbf{R}^3_{x^3}$ 或いは $S^3_{x^3}$ の中での像は full になっている。

今、$\mathbf{R}^4$ の共形変換 Φ が存在して、$\Phi(\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)) = \bar{\mathbf{p}}(x^1,x^2,x^3)$ が成り立つと仮定する。この時、固定した各 x^3 に対して、Φ は $\mathbf{R}^3_{x^3}$ を $S^3_{x^3}$ に移し、更に、その中の曲面上で $\Phi^*\hat{g}_{\bar{\mathbf{p}}} = (1+\bar{l}(x^3))^2\hat{g}_{\mathbf{p}}$ が成り立つ。これは命題 2.1 に矛盾する。よって、我々の仮定を満たす $\mathbf{R}^4$ の共形変換 Φ は存在しない。 q.e.d.

3. 正の定曲率曲面から作られる共形平坦な超曲面

この節では、第一基本形式 g が

$$g = e^{2P(x)}\{(\cosh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (\sinh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (dx^3)^2\} \tag{3.1}$$

と表され、更に $P = P(x^3)$ となる場合の古典例に属さない $\mathbf{R}^4$ 内の generic で共形平坦な超曲面の存在を調べる。この場合も §2 の時と同じく関数 φ は

$$\varphi(x^1,x^2,x^3) = A(x^1,x^2) + B(x^3) \tag{3.2}$$

と表すことが出来る。

計量 $\bar{g} = (\cosh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (\sinh\varphi(x))^2(dx^1)^2 + (dx^3)^2$ が共形平坦であるための条件は (1.13) の他に φ に関して次の 3 つの方程式が成り立つことである：

$$\begin{aligned}&\varphi_2\varphi_{33} + 2\varphi_3\varphi_{23}\sinh^2\varphi - \varphi_{233}\sinh\varphi\cosh\varphi \\ &= \varphi_2(\varphi_{11}+\varphi_{22})(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi) - (\varphi_{11}+\varphi_{22})_2\sinh\varphi\cosh\varphi.\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1\varphi_{33} - 2\varphi_3\varphi_{13}\cosh^2\varphi + \varphi_{133}\sinh\varphi\cosh\varphi \\ &= \varphi_1(\varphi_{11}+\varphi_{22})(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi) - (\varphi_{11}+\varphi_{22})_1\sinh\varphi\cosh\varphi.\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}&2\varphi_1\varphi_{13}\cosh^2\varphi - 2\varphi_2\varphi_{23}\sinh^2\varphi + \varphi_{223}\sinh\varphi\cosh\varphi \\ &-\varphi_3(\varphi_{11}+\varphi_{22}) = -\varphi_3\varphi_{33}(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi) + (\varphi_{113}-\varphi_{223}+\varphi_{333})\sinh\varphi\cosh\varphi.\end{aligned} \tag{3.5}$$

定理 3.1. *$\{x^1,x^2,x^3\}$ を $\boldsymbol{R}^3$ (あるいは $\boldsymbol{R}^3$ の開集合) の Guichard net とし、$\boldsymbol{R}^3$ の標準的平坦計量 g がこの net によって (3.1) の形に表わされているとする。更に、不等式 $A_1 \neq 0$ あるいは $A_2 \neq 0$ の少なくとも 1 つが成り立つ関数 $A(x^1,x^2)$ と、$B_3 \neq 0$ となる関数 $B(x^3)$ により、関数 φ が次のように表わされていると仮定する:*

$$\varphi(x^1,x^2,x^3) = A(x^1,x^2) + B(x^3). \tag{3.6}$$

この時、次の主張 *(1)* と *(2)* が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{R}^3$ での各 x^3- 曲線は円弧である。

(2) 関数 $A(x^1,x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は次の方程式 *(a), (b), (c)* のいずれかを満たす: 次の式で E と G は定数である。

(a) $A_{11}+A_{22}=-\frac{1}{2}E\sinh(2A)$, $(B_3)^2=\frac{1}{2}(E\cosh(2B)+G)$.

(b) $A_{11}+A_{22}=E\cosh(2A)$, $(B_3)^2=E\sinh(2B)+G$.

(c) $A_{11}+A_{22}=Ee^{-2A}$, $(B_3)^2=Ee^{2B}+G$.

証明. 主張 (1) の証明は定理 2.1-(1) と同じである。(2) の証明をする。

先ず、方程式 (3.3)、(3.4) と (3.5) を関数 A と B を使って書き直す。この時、次の式を得る:

$$A_2B_{33}=A_2(A_{11}+A_{22})(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi)-(A_{11}+A_{22})_2\sinh\varphi\cosh\varphi. \tag{3.6}$$

$$A_1B_{33}=A_1(A_{11}+A_{22})(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi)-(A_{11}+A_{22})_1\sinh\varphi\cosh\varphi. \tag{3.7}$$

$$B_3(A_{11}+A_{22})=B_3B_{33}(\sinh^2\varphi+\cosh^2\varphi)-B_{333}\sinh\varphi\cosh\varphi. \tag{3.8}$$

以後の議論は定理 2.1 の証明とほぼ同様である。(3.6) と (3.7) より、

$$(A_{11}+A_{22})_1/A_1=(A_{11}+A_{22})_2/A_2=-2C(x^1,x^2) \tag{3.9}$$

とおく事が出来る。また、簡単のため、

$$A_{11}+A_{22}=D(x^1,x^2) \tag{3.10}$$

とおく。この時、(3.6) と (3.7) は

$$B_{33}=D\cosh(2\varphi)+C\sinh(2\varphi) \tag{3.11}$$

と表せる。この (3.11) 式について考える。

(a) $C^2(x^1,x^2)>D^2(x^1,x^2)$ となる場合。 $C(x^1,x^2)>0$ と仮定する。関数 $\zeta=\zeta(x^1,x^2)$ を

$$D/\sqrt{C^2-D^2}=\sinh\zeta,\quad C/\sqrt{C^2-D^2}=\cosh\zeta$$

で定めれば、(3.11) は

$$\begin{aligned}B_{33}&=\sqrt{C^2-D^2}\sinh(2\varphi+\zeta)\\&=\sqrt{C^2-D^2}\{\sinh(2A+\zeta)\cosh(2B)+\cosh(2A+\zeta)\sinh(2B)\}\end{aligned}$$

となる。この式で B は x^3 のみの関数であり、A と ζ は x^1 と x^2 の関数である。従って、2 つの定数 $\bar{C}$ と $\bar{D}$ が存在して

$$\bar{C}=\sqrt{C^2-D^2}\sinh(2A+\zeta),\quad \bar{D}=\sqrt{C^2-D^2}\cosh(2A+\zeta)$$

とおくことが出来る。特に、$\bar{D} > \bar{C}$ で $\bar{D} > 0$。従って、(3.11) は

$$B_{33} = \bar{C}\cosh(2B) + \bar{D}\sinh(2B) \tag{3.12}$$

となる。

(3.12) を (3.8) に代入して

$$A_{11} + A_{22} = \bar{C}\cosh(2A) - \bar{D}\sinh(2A) \tag{3.13}$$

を得る。定数 F を

$$\sinh F = \bar{C}/\sqrt{\bar{D}^2 - \bar{C}^2}, \quad \cosh F = \bar{D}/\sqrt{\bar{D}^2 - \bar{C}^2}$$

で定めるとき、(3.12) と (3.13) は、それぞれ

$$B_{33} = \sqrt{\bar{D}^2 - \bar{C}^2}\sinh(2B + F), \qquad A_{11} + A_{22} = -\sqrt{\bar{D}^2 - \bar{C}^2}\sinh(2A - F)$$

となる。ここで、

$$2\varphi = 2(A + B) = (2A - F) + (2B + F)$$

で F は定数であるから、

$$A_{11} + A_{22} = -\frac{E}{2}\sinh(2A), \quad B_{33} = \frac{E}{2}\sinh(2B) \tag{3.14}$$

としてよい、ここで E は正の定数。また、$2B_{33}B_3 = E/2\sinh(2B)\cdot(2B_3)$ より、G を定数として $(B_3)^2 = (E\cosh(2B) + G)/2$ を得る。 $C(x^1, x^2) < 0$ の時は、(3.14) 式で E は負の定数となる。

(b) $C^2(x^1, x^2) < D^2(x^1, x^2)$ となる場合。 $D(x^1, x^2) > 0$ と仮定する。(3.11) 式に関して (a) の場合と同様の変形を行う。この場合は、関数 $\zeta = \zeta(x^1, x^2)$ を次で定義する：

$$C/\sqrt{D^2 - C^2} = \sinh\zeta, \quad D/\sqrt{D^2 - C^2} = \cosh\zeta.$$

この時、(3.12) を得たのと同様に、$\bar{C} > \bar{D}$ で $\bar{C} > 0$ となる定数 $\bar{C}$ と $\bar{D}$ が存在して、

$$B_{33} = \bar{C}\cosh(2B) + \bar{D}\sinh(2B)$$

が成り立つ。この式から (a) の時と同様に

$$A_{11} + A_{22} = E\cosh(2A), \quad (B_3)^2 = E\sinh(2B) + G \tag{3.15}$$

を得る、ここで E は正の定数で G は定数である。

$D(x^1, x^2) < 0$ の時は、(3.15) 式で E は負の定数となる。

(c) $C^2(x^1, x^2) = D^2(x^1, x^2)$ となる場合。 (3.11) 式は

$$\begin{aligned} B_{33} = &\{D\cosh(2A) + C\sinh(2A)\}\cosh(2B) \\ &+\{D\sinh(2A) + C\cosh(2A)\}\sinh(2B) \end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。従って、$\{D\cosh(2A)+C\sinh(2A)\}(x^1,x^2)$ と $\{D\sinh(2A)+C\cosh(2A)\}(x^1,x^2)$ は定数となる。この定数をそれぞれ $\bar{C}$、$\bar{D}$ とおけば $\bar{C}^2=\bar{D}^2$ が成り立つ。また、(3.16) 式は

$$B_{33}=\bar{C}\cosh(2B)+\bar{D}\sinh(2B)$$

となる。関数 A については次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}A_{11}+A_{22}&=\cosh(2\varphi)B_{33}-\sinh(2\varphi)\{\bar{C}\sinh(2B)+\bar{D}\cosh(2B)\}\\&=\cosh(2\varphi)\{\bar{C}\cosh(2B)+\bar{D}\sinh(2B)\}\\&\quad-\sinh(2\varphi)\{\bar{C}\sinh(2B)+\bar{D}\cosh(2B)\}\\&=\bar{C}\cosh(2A)-\bar{D}\sinh(2A).\end{aligned}$$

故に、$\bar{C}=\bar{D}$ の時、

$$A_{11}+A_{22}=\bar{C}e^{-2A},\quad B_{33}=\bar{C}e^{2B},$$

$\bar{C}=-\bar{D}$ の時、

$$A_{11}+A_{22}=\bar{C}e^{2A},\quad B_{33}=\bar{C}e^{-2B}$$

となる。しかし、これら 2 つの場合は、A を $-A$ に B を $-B$ に変えれば、同じ式である。

以上により、定理 3.1 は証明された。 q.e.d.

定理 3.2. $\boldsymbol{R}^4$ 内に埋め込まれた曲面 $S:(x^1,x^2)\mapsto\mathbf{f}(x^1,x^2)\in\boldsymbol{R}^4$ に対し、S の *normal bundle* の正規直交標構 $\{\mathbf{n},\bar{\mathbf{n}}\}$ で、

$$\mathbf{n}_1=\kappa_1(x^1,x^2)\mathbf{f}_1,\quad \mathbf{n}_2=\kappa_2(x^1,x^2)\mathbf{f}_2,$$

$$\bar{\mathbf{n}}_1=\bar{\kappa}_1(x^1,x^2)\mathbf{f}_1,\quad \bar{\mathbf{n}}_2=\bar{\kappa}_2(x^1,x^2)\mathbf{f}_2$$

を満たすものが存在するとする、ここで $\kappa_i(x^1,x^2)$ と $\bar{\kappa}_i(x^1,x^2)$ は S の主曲率である。更に、このような曲面 S とある *2* つの関数 $l(x^3)$, $m(x^3)$ $(l(0)=m(0)=0)$ から $\boldsymbol{R}^4$ 内の超曲面 $\mathbf{p}:(x^1,x^2,x^3)\mapsto\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)\in\boldsymbol{R}^4$ が次の形で作られているとする：

$$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)=\mathbf{f}(x^1,x^2)+l(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2)+m(x^3)\bar{\mathbf{n}}(x^1,x^2). \tag{3.17}$$

この時、$(l(x^3),x(x^3))$ が $\boldsymbol{R}^2$ の直線ではなく、またこの超曲面 $\mathbf{p}$ の第一基本形式が、定理 *3.1* で与えられた関数 $A=A(x^1,x^2)$ と $B=B(x^3)$ $(B(0)=0)$ を使って

$$e^{2P(x^3)}\{\cosh^2(A+B)(dx^1)^2+\sinh^2(A+B)(dx^2)^2+(dx^3)^2\} \tag{3.18}$$

で与えられるならば、初めの曲面 S は $\boldsymbol{R}^3$ の曲面であるか、あるいは S^3 に含まれている曲面である。

証明. 先ず、写像 $\mathbf{p}(x^1,x^2,0)$ を考える。この時 $\mathbf{p}_1=\mathbf{f}_1$、$\mathbf{p}_2=\mathbf{f}_2$. 故に、写像 $\mathbf{f}$ の第一基本形式は $e^{2P(0)}\{\cosh^2A(dx^1)^2+\sinh^2A(dx^2)^2\}$ である。$e^{P(0)}\mathbf{f}(x^1,x^2)$ を改めて

$\mathbf{f}(x^1,x^2)$ とおけば、$e^{P(0)}=1$ としてよい。また、このことより $(l_3^2+m_3^2)(0)=1$ と仮定できる。

次に、$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)$ の定義より

$$\|\mathbf{p}_1\| = (1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1)^2\cosh^2 A, \tag{3.19}$$

$$\|\mathbf{p}_2\| = (1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2)^2\sinh^2 A, \quad \|\mathbf{p}_3\| = l_3^2+m_3^2$$

となる。以下簡単のため、$\sinh A \geq 0,\ (1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1)\geq 0,\ (1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2)\geq 0$ を仮定する。(3.18) と (3.19) より、

$$\cosh(A+B) = \frac{1+l\kappa_1+m\bar{\kappa}_1}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}\cosh A, \quad \sinh(A+B) = \frac{1+l\kappa_2+m\bar{\kappa}_2}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}\sinh A \tag{3.20}$$

成り立つ。

(3.20) 式より、

$$\cosh B - \frac{1}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}} = \frac{l}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\kappa_1\cosh^2 A - \kappa_2\sinh^2 A) \tag{3.21}$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\bar{\kappa}_1\cosh^2 A - \bar{\kappa}_2\sinh^2 A)$$

及び

$$\sinh B = \sinh A\cosh A\{\frac{l}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\kappa_2-\kappa_1) + \frac{m}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}(\bar{\kappa}_2-\bar{\kappa}_1)\} \tag{3.22}$$

を得る。(3.21) 式で、左辺と $l/\sqrt{l_3^2+m_3^2},\ m/\sqrt{l_3^2+m_3^2}$ は x^3 のみの関数であり、また $(l(x^3),m(x^3))$ は直線ではないことより、定数 C_1 と C_2 が存在して

$$(\kappa_1\cosh^2 A - \kappa_2\sinh^2 A) = C_1, \quad (\bar{\kappa}_1\cosh^2 A - \bar{\kappa}_2\sinh^2 A) = C_2 \tag{3.23}$$

となる。同様に (3.22) より、定数 C_3 と C_4 が存在して

$$\sinh A\cosh A(\kappa_2-\kappa_1) = C_3, \quad \sinh A\cosh A(\bar{\kappa}_2-\bar{\kappa}_1) = C_4 \tag{3.24}$$

が成り立つ。(3.23) と (3.24) より、

$$\kappa_1 = C_1 + C_3\tanh A, \quad \kappa_2 = C_1 + C_3\coth A,$$

$$\bar{\kappa}_1 = C_2 + C_4\tanh A, \quad \bar{\kappa}_2 = C_2 + C_4\coth A$$

を得る。(今、仮に $C_3=0$ とすれば、ある定ベクトル $\mathbf{a}$ が存在して $\mathbf{n}=\mathbf{a}+C_1\mathbf{f}$ となる。故に、$<\mathbf{a}+C_1\mathbf{f},\mathbf{f}_i>=<\mathbf{n},\mathbf{f}_i>=0\ (i=1,2)$ より、$\|\ \mathbf{a}+C_1\mathbf{f}\ \|=$ 一定 となり、曲面 $\mathbf{f}$ は球面に属する。故に、以下 $C_3\neq 0,\ C_4\neq 0$ を仮定する。) 以上より

$$\mathbf{n}_1 = (C_1+C_3\tanh A)\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{n}_2 = (C_1+C_3\coth A)\mathbf{f}_2, \tag{3.25}$$

$$(3.26) \qquad \bar{\mathbf{n}}_1 = (C_2 + C_4 \tanh A)\mathbf{f}_1, \quad \bar{\mathbf{n}}_2 = (C_2 + C_4 \coth A)\mathbf{f}_2$$

が得られる。(3.25) と (3.26) より、$i = 1,\ 2$ として

$$(3.27) \qquad (C_4\mathbf{n} - C_3\bar{\mathbf{n}})_i = (C_1C_4 - C_2C_3)\mathbf{f}_i$$

が成り立つ。(3.27) 式で $(C_1C_4 - C_2C_3) = 0$ となるならば、曲面 S は定ベクトル $(C_4\mathbf{n} - C_3\bar{\mathbf{n}})$ に直交する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面である。

次に $(C_1C_4 - C_2C_3) \neq 0$ の場合を調べる、簡単のため、$(C_1C_4 - C_2C_3) = 1$ と仮定する。(3.27) より、ある定ベクトル $\mathbf{a}$ が存在して $C_4\mathbf{n} - C_3\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{a} + \mathbf{f}$ となる。$< C_4\mathbf{n} - C_3\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{f} > = < \mathbf{a}, \mathbf{f} > + < \mathbf{f}, \mathbf{f} >$ の両辺を x^i $(i = 1,\ 2)$ で微分して

$$(3.28) \qquad < \mathbf{f}_i, \mathbf{f} > + < C_4\mathbf{n} - C_3\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{f}_i > = < \mathbf{a}, \mathbf{f}_i > +2 < \mathbf{f}_i, \mathbf{f} >$$

を得る。$\mathbf{n}$ と $\bar{\mathbf{n}}$ は曲面 S の法ベクトルだから、(3.28) より $< \mathbf{a} + \mathbf{f}, \mathbf{f}_i > = 0$、即ち

$$< \mathbf{a} + \mathbf{f}, \mathbf{a} + \mathbf{f} > = \text{一定}$$

となる。こうして、曲面 S は $(-\mathbf{a})$ を中心とする球面 S^3 に含まれる。 q.e.d.

定理 3.1、定理 3.2 と [8] の定理 5.2-(3.II) より、$P = P(x^3)$ となる計量 (3.1) を持ち古典型に含まれない generic で共形平坦な超曲面が存在するならば、それらの超曲面は計量 $\cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2$ を持つ $\mathbf{R}^3$ あるいは S^3 の曲面から定理 3.2 に述べた方法で作られていなければならない。

次に“定理 3.1 で求めた中のどのような関数 $A(x^1, x^2)$ に対して、次の条件 (1)、(2) を満たす $\mathbf{R}^3$ あるいは S^3 内の曲面が存在するか?”という問題を考える：(1) 上の形量を持つ。(2) 定理 3.2 の条件を満たす normal bundle の正規直交標構が存在する。

定理 3.3. 定理 *3.1-(2)* で与えられた関数 $A(x^1, x^2)$ に対して、 $\boldsymbol{R}^3$ あるいは半径 1 の球面 S^3 内の曲面 S が存在して、その第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ が、それぞれ次の形で与えられていると仮定する：

$$(3.29) \qquad \hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2.$$

$$(3.30) \qquad \hat{s} = s_{11}(dx^1)^2 + s_{22}(dx^2)^2,$$

ここで、s_{ii} *(*$i = 1,\ 2$*)* は x^1 と x^2 の関数である。

この時、関数 A は次の *(1)*、*(2)* で与えられる場合のいずれかになる*:*

(1) 定理 *3.1-(2)* の *(a)* の場合。 $E > 0$ の時は $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面が存在しその第二基本形式は

$$\hat{s} = -\sqrt{E}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$$

で与えられる。また、$E > 1$ の時は S^3 内の曲面も存在しその第二基本形式は

$$\hat{s} = -\sqrt{E-1}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$$

で与えられる。

(2) *(c)* の場合。$E>0$ の時は $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面が存在しその第二基本形式は

$$\hat{s}=\sqrt{E}e^{-A}\{\cosh A(dx^1)^2-\sinh A(dx^2)^2\}$$

で与えられる。

証明. 初めに、定数 E が正の場合を考える、そこで $E=\bar{E}^2$ とおく。計量 $\hat{g}$ の曲率 K は

$$K=-(A_{11}+A_{22})/(\sinh A\cosh A) \tag{3.31}$$

である。

$$s_{11}=\bar{E}a(x^1,x^2)\cosh^2 A,\quad s_{22}=-\bar{E}b(x^1,x^2)\sinh^2 A \tag{3.32}$$

とおく。この時、S が $\mathbf{R}^3$ 内の曲面であれば、(3.31) より

$$\bar{E}^2ab=(A_{11}+A_{22})/(\sinh A\cosh A) \tag{3.33}$$

が成り立つ。S が半径 1 の球面 S^3 内の曲面の時は、

$$\bar{E}^2ab-1=(A_{11}+A_{22})/(\sinh A\cosh A). \tag{3.34}$$

Coddazi の方程式

$$\partial(s_{11})/\partial x^2=\Gamma^1_{12}s_{11}-\Gamma^2_{11}s_{22},\quad \partial(s_{22})/\partial x^1=-\Gamma^1_{22}s_{11}+\Gamma^2_{12}s_{22}$$

より、

$$a_2\cosh A=-(a+b)A_2\sinh A,\quad b_1\sinh A=-(a+b)A_1\cosh A \tag{3.35}$$

が成り立つ。この時、a と b は定理 3.2 の証明 ((3.25) と (3.26)) から、$a=a(A)$, $b=b(A)$ として求めればよい。そこで、$a'=\partial a/\partial A$, $b'=\partial b/\partial A$ と表す時、(3.35) より $(a+b)'=-(a+b)(\cosh^2 A+\sinh^2 A)/(\sinh A\cosh A)$ を得る。故に、次の式が成り立つ: C を定数として

$$(a+b)=C/(\sinh A\cosh A) \tag{3.36}$$

関数 A が定理 3.1-(2) の (a) で与えられる場合。先ず $\mathbf{R}^3$ 内の曲面が存在することを示す。この場合は (3.33) より、$ab=-1$ となる、即ち、そのような曲面が存在すれば、正の定曲率曲面である。(3.36) より、a と b は t の 2 次式 $t^2-(C/(\sinh A\cosh A))t-1=0$ の解である。また、(3.25) と (3.26) から a と b は根号を含まない形の $\sinh A$ と $\cosh A$ で表される関数となる。以上より $C^2=1$ で a,b は $-\sinh A/\cosh A$, $\cosh A/\sinh A$ のどちらかであるが、それは (3.35) で決まる。

この時の第二基本形式 $\hat{s}$ は

$$\hat{s} = -\bar{E}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$$

で与えられる。

次に、$E = \bar{E}^2 > 1$ の時 S^3 内の曲面が存在することを示す。この場合は、(3.34) より、$ab = -1 + \bar{E}^{-2}$ となる。そこで $ab = -D$ とおく。$\mathbf{R}^3$ の時と同様に、a, b は $t^2 - (C/(\sinh A\cosh A))t - D = 0$ の解である。判別式の平方条件より、$C^2 = D$ となり $D > 0$ である。この時 $a = -\sqrt{D}\sinh A/\cosh A$, $b = \sqrt{D}\cosh A/\sinh A$ を得る。また、第二基本形式 $\hat{s}$ は

$$\hat{s} = -\bar{E}\sqrt{D}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$$

で与えられる。

(b) の場合。$\mathbf{R}^3$ の曲面のときは、$ab = \cosh(2A)/(\sinh A\cosh A)$ である。よって、a と b は

$$t^2 - (C/(\sinh A\cosh A))t + \cosh(2A)/(\sinh A\cosh A) = 0$$

の解となる。(a) の時と同様に、この判別式 D が平方の形になっていれば、求める a と b が存在することになる。ところで、判別式は

$$D = e^{4A}\{(e^{-4A} + C^2)^2 - 1 - C^4\}/(2\sinh^2 A\cosh^2 A)$$

となり、平方の形にならない。

S^3 の曲面のときは、$ab = \cosh(2A)/(\sinh A\cosh A) + \bar{E}^{-2}$ である。よって、この時の判別式 D は

$$4D\bar{E}^2\sinh^2 A\cosh^2 A = 4C^2\bar{E}^2 + 2 - (2\bar{E}^2 + 1)e^{4A} + (2\bar{E}^2 - 1)e^{-4A}$$

を満たす。$2\bar{E}^2 - 1 \geq 0$ の時は、上の式の右辺が平方式にならないことは $2\bar{E}^2 + 1 > 0$ からすぐ分かる。$2\bar{E}^2 - 1 < 0$ の時も、

$$-\{(\sqrt{2\bar{E}^2 + 1}e^{2A} + \sqrt{1 - 2\bar{E}^2}e^{-2A})^2 - 4C^2\bar{E}^2 - 2 - 2\sqrt{1 - 4\bar{E}^4}\}$$

だから、これも平方式にならない。従って、(b) の場合は求める曲面は存在しない。

(c) の場合。$\mathbf{R}^3$ の曲面のときは、$ab = e^{-2A}/(\sinh A\cosh A)$ である。よって、$C^2 = 1$ となり、$a = (1 - e^{-2A})/(2\sinh A\cosh A)$, $b = (1 + e^{-2A})/(2\sinh A\cosh A)$ となる。この時の $\hat{s}$ は

$$\hat{s} = \bar{E}e^{-A}\{\cosh A(dx^1)^2 - \sinh A(dx^2)^2\}$$

である。

S^3 の曲面のときは、$ab = e^{-2A}/(\sinh A\cosh A) + \bar{E}^{-2}$ である。この場合の判別式 D は

$$4D\bar{E}^2\sinh^2 A\cosh^2 A = -e^{4A} - 2(2\bar{E}^2 - 2C^2\bar{E}^2 - 1) + (4\bar{E}^2 - 1)e^{-4A} \tag{3.37}$$

を満たす。$4\bar{E}^2-1>0$ の時、(3.37) の右辺は

$$(4\bar{E}^2-1)e^{4A}\{(e^{-4A}-\frac{2\bar{E}^2-2C^2\bar{E}^2-1}{4\bar{E}^2-1})^2-\frac{(4\bar{E}^2-1)+(2\bar{E}^2-2C^2\bar{E}^2-1)^2}{(4\bar{E}^2-1)^2}\}$$

となり、平方式にならない。$4\bar{E}^2-1=0$ の時も、(3.37) の右辺からすぐ分かるように平方式にならない。$4\bar{E}^2-1<0$ の時、(3.37) の右辺は

$$-\{(e^{2A}+\sqrt{1-4\bar{E}^2}e^{-2A})^2-2\sqrt{1-4\bar{E}^2}+2(\bar{E}^2-2C^2\bar{E}^2-1)\}$$

となり、これも平方式にならない。以上より、S^3 内には求める曲面は存在しない。

次に、$E=-\bar{E}^2$ の場合を調べる。この場合は (a), (b), (c) のすべての場合について、求める曲面は存在しない。先ず、式 (3.31) − (3.36) は $E=-\bar{E}^2$ の場合にも成り立つことを注意しておく。

(a) の場合。曲面が $\mathbf{R}^3$ に入っている場合は $ab=1$ となり、曲面が S^3 に入っている場合は $ab=1+\bar{E}^{-2}$ となる。この場合の 2 次式の判別式 D は、それぞれ

$$D=(C^2-\sinh^2(2A))/(\sinh^2 A\cosh^2 A),$$

$$D=\{C^2-(1+\bar{E}^{-2})\sinh^2(2A)\}/(\sinh^2 A\cosh^2 A)$$

となり、これらは平方式にならない。

(b) の場合。曲面が $\mathbf{R}^3$ に入っている場合は $ab=-\cosh(2A)/(\sinh A\cosh A)$ となり、曲面が S^3 に入っている場合は $ab=-\cosh(2A)/(\sinh A\cosh A)+\bar{E}^{-2}$ となる。この場合の 2 次式の判別式 D は、それぞれ

$$D\sinh^2 A\cosh^2 A=C^2+\sinh(4A),$$

$$4D\bar{E}^2\sinh^2 A\cosh^2 A=(4C^2\bar{E}^2+2)+(2\bar{E}^2-1)e^{4A}-(2\bar{E}^2+1)e^{-4A}$$

を満たし、これらの式の右辺は平方式にならない。

(c) の場合。曲面が $\mathbf{R}^3$ に入っている場合は $ab=-e^{-2A}/(\sinh A\cosh A)$ となり、曲面が S^3 に入っている場合は $ab=-e^{-2A}/(\sinh A\cosh A)+\bar{E}^{-2}$ となる。この場合の 2 次式の判別式 D は、それぞれ

$$D\sinh^2 A\cosh^2 A=(C^2+1)-e^{-4A},$$

$$4D\bar{E}^2\sinh^2 A\cosh^2 A=(4C^2\bar{E}^2+4\bar{E}^2+2)-e^{4A}-(4\bar{E}^2+1)e^{-4A}$$

を満たし、これらの式の右辺は平方式にならない。

以上より、$E=-\bar{E}^2$ の場合には求める曲面は存在しないことが証明された。　q.e.d.

定理 3.4.　関数 $A=A(x^1,x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は、定理 *3.1-(2)* の *(a)* において定義されたものとし、その定義で $E>0$ とする。また、S をこの関数 A によって定まる $\boldsymbol{R}^3$

内の正の定曲率曲面とする。S の第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2,$$
$$\hat{s} = -\sqrt{E}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}.$$

この時、曲面 S と関数 $B(x^3)$ から定理 *3.2* の方法 *(3.17)* で作られた写像 $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ が、$\boldsymbol{R}^4$ 内の *generic* で共形平坦な超曲面を定義するための条件は、$B(x^3)$ の定義において $E > G$ が成り立つことである。

また、この時の超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線は主曲率線となる。

証明. 曲面 S は $\mathbf{R}^3$ に含まれているから、この埋め込みを $S: (x^1, x^2) \mapsto \mathbf{f}(x^1, x^2) \in \mathbf{R}^3$ で表す。この時、埋め込み (3.17) は

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{n}(x^1, x^2), m(x^3))$$

と表される、即ち、定理 3.2 で $\mathbf{n}(x^1, x^2)$ は $\mathbf{R}^3$ における S の単位法ベクトル場であり、$\bar{\mathbf{n}}(x^1, x^2)$ は $\mathbf{e}_4$ である。第二基本形式の形から

$$\mathbf{n}_1 = \sqrt{E}\sinh A/\cosh A\ \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{n}_2 = \sqrt{E}\cosh A/\sinh A\ \mathbf{f}_2$$

が成り立つ。また、$\bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\mathbf{n}}_2 = 0$ となる。そこで、(3.20) は次の式になる：

$$\cosh(A+B) = \frac{\cosh A + \sqrt{E}l\sinh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh(A+B) = \frac{\sinh A + \sqrt{E}l\cosh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}.$$

故に、

$$\cosh B = 1/\sqrt{l_3^2 + m_3^2}, \quad \sinh B = \sqrt{E}l/\sqrt{l_3^2 + m_3^2} \tag{3.38}$$

を得る。また、逆に、(3.38) が成り立つ l と m が存在すれば、写像 $\mathbf{p}$ は generic で共形平坦な超曲面を定義する。(3.38) より

$$l_3^2 + m_3^2 = 1 - El^2, \quad l = \tanh B/\sqrt{E}$$

が得られる。$B_3^2 = (E\cosh(2B) + G)/2$ だから $m_3^2 = (E - G)/(2E\cosh^4 B)$ となり、$E > G$ でなければならない。$E = G$ の時は、$m_3 = 0$ となり、写像 $\mathbf{p}$ は超曲面にならない。

また、超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線が主曲率線となることは直ちに分かる。 q.e.d.

定理 3.5. 関数 $A = A(x^1, x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は、定理 *3.1-(2)* の *(a)* において定義されたものとし、その定義で $E > 1$ とする。また、S をこの関数 A によって定まる半径 1 の球面 S^3 内の正の定曲率曲面とする。S の第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2,$$

$$\hat{s} = -\sqrt{E-1}\sinh A\cosh A\{(dx^1)^2+(dx^2)^2\}.$$

この時、曲面 S と関数 $B(x^3)$ から定理 *3.2* の方法 *(3.17)* で作られた写像 $\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3)$ が、$\boldsymbol{R}^4$ 内の *generic* で共形平坦な超曲面を定義するための条件は、$B(x^3)$ の定義において $E \geq G+2$ が成り立つことである。

また、この時の超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線は主曲率線となる。

証明. 曲面 S は S^3 に含まれているから、この埋め込みを $S:(x^1,x^2)\mapsto \mathbf{f}(x^1,x^2)\in S^3$ で表す。この時、埋め込み (3.17) は、$\mathbf{f}(x^1,x^2)$ が S^3 の単位法ベクトル場であるから、$\mathbf{n}(x^1,x^2)$ を S^3 における S の単位法ベクトル場とする時

$$\mathbf{p}(x^1,x^2,x^3) = (1+l(x^3))\mathbf{f}(x^1,x^2)+m(x^3)\mathbf{n}(x^1,x^2)$$

と表される。また、第二基本形式の形から

$$\mathbf{n}_1 = \sqrt{E-1}\sinh A/\cosh A\ \mathbf{f}_1,\quad \mathbf{n}_2 = \sqrt{E-1}\cosh A/\sinh A\ \mathbf{f}_2$$

が成り立つ。そこで、(3.20) は次の式になる：

$$\cosh(A+B) = \frac{(1+l)\cosh A+\sqrt{E-1}m\sinh A}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}},$$

$$\sinh(A+B) = \frac{(1+l)\sinh A+\sqrt{E-1}m\cosh A}{\sqrt{l_3^2+m_3^2}}.$$

故に、

(3.39) $$\cosh B = (1+l)/\sqrt{l_3^2+m_3^2},\quad \sinh B = \sqrt{E-1}m/\sqrt{l_3^2+m_3^2}$$

を得る。また、逆に、(3.39) が成り立つ l と m が存在すれば、写像 $\mathbf{p}$ は generic で共形平坦な超曲面を定義する。簡単のため、$\bar{l}=(1+l)$, $C=\sqrt{l_3^2+m_3^2}$ とおく。この時、

(3.40) $$m = \bar{l}\tanh B/\sqrt{E-1},\quad \bar{l}^2-(E-1)m^2 = C^2$$

となる。m と $m_3 = (\bar{l}_3\sinh B\cosh B+\bar{l}B_3)/(\sqrt{E-1}\cosh^2 B)$ を (3.39) の第二式に代入することにより、

$$\cosh^2 B(E\cosh^2 B-1)(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}})^2+2B_3\sinh B\cosh B\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}}+\{B_3^2-(E-1)\cosh^2 B\}=0$$

を得る。$(\bar{l}_3/\bar{l})$ が実解をもつ条件は、$(B_3)^2=(E\cosh(2B)+G)/2$ から、上の判別式 D が

$$D/2 = (E-1)(E-G-2)\cosh^4 B$$

となることより、$E\geq G+2$ である。また、$l(x^3)$ が決まれば、$m(x^3)$ も定まる。特に、$E=G+2$ の時は、$m_3=\sqrt{E-1}B_3\bar{l}/(E\cosh^2 B-1)$ となる。 q.e.d.

§2 の系 2.1 と同様に次の結果を得る。

系 3.1. $E > 1,\ E \geq G + 2$ とする。この時、関数の組 $\{A(x^1, x^2), B(x^3)\}$ から定義される *(定理 3.4 と定理 3.5 で述べた)2 つの generic* で共形平坦な超曲面は、共形的に異なる超曲面である。

次の定理で与えられる超曲面は、$\mathbf{R}^3$ の定曲率曲面から決まるものではないことを注意しておく。

定理 3.6. 関数 $A = A(x^1, x^2)$ と関数 $B(x^3)$ は、定理 *3.1-(2)* の *(c)* において定義されたものとし、その定義で $E > 0$ とする。また、S をこの関数 A によって定まる $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面とする。S の第一基本形式 $\hat{g}$ と第二基本形式 $\hat{s}$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2,$$

$$\hat{s} = \sqrt{E}e^{-A}\{\cosh A\{(dx^1)^2 - \sinh A(dx^2)^2\}.$$

この時、曲面 S と関数 $B(x^3)$ から定理 *3.2* の方法 *(3.17)* で作られた写像 $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ が、$\boldsymbol{R}^4$ 内の *generic* で共形平坦な超曲面を定義するための条件は、$B(x^3)$ の定義において $G < 0,\ Ee^{2B} + G > 0$ が成り立つことである。

また、この時の超曲面 $\mathbf{p}$ の各座標曲線は主曲率線となる。

証明. 定理 3.4 の証明と同様に、写像 $\mathbf{p}$ は

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{n}(x^1, x^2), m(x^3))$$

となる。この時、写像 $\mathbf{f}$ の単位法ベクトル場 $\mathbf{n}(x^1, x^2)$ は

$$\mathbf{n}_1 = -\sqrt{E}e^{-A}/\cosh A\ \mathbf{f}_1,\quad \mathbf{n}_2 = \sqrt{E}e^{-A}/\sinh A\ \mathbf{f}_2$$

を満たす。このことより、

$$2\sqrt{E}l = 1 - e^{-2B},\quad m_3^2 = 1 - 2\sqrt{E}l - l_3^2 \tag{3.41}$$

を得る。また、逆に、(3.41) が成り立つ l と m が存在すれば、写像 $\mathbf{p}$ は generic で共形平坦な超曲面を定義する。$\sqrt{E}l_3 = e^{-2B}B_3$ と $B_3^2 = Ee^{2B} + G$ より、$Em_3^2 = -Ge^{-4B}$ が成り立つ。従って、$G < 0,\ Ee^{2B} + G > 0$ の時、超曲面 $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ は存在する。

q.e.d.

References

[1] E. Cartan, La déformation des hypersurfaces dans L'espace conforme á $n \geq 5$ dimensions, in Oeuvres complétes III, 1, 221 – 286.

[2] U. HERTRICH-JEROMIN, On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets, Beitr. Alg. Geom. 35(1994), 315 – 331.

[3] J. LAFONTAINE, Conformal geometry from Riemannian viewpoint, in Conformal Geometry (R.S. Kulkarni and U. Pinkall, eds.), Aspects of Math. Vol. E12, Max-Plank-Ins. für Math. (1988), 65 – 92.

[4] Y. SUYAMA, Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space, Nagoya Math. J. 158 (2000), 1–42.

[5] Y. SUYAMA, Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space II. a preprint.

[6] Y. SUYAMA, Explicit representation of compact conformally flat hypersurfaces, Tôhoku Math. J. 50(1998), 179 – 196.

[7] Y. SUYAMA, Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space and a class of Riemannian 3-manifolds, RIMS Kokyuroku 1236 (2001), 60–89.

[8] Y. SUYAMA, Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space, (in Japanese) Lecture Note Series in Mathematics, Osaka Univ. (Edited by R. Kobayashi) 7(2002), 315–348.

[9] U. HERTRICH-JEROMIN, E.-H. TJADEN AND M.T. ZURCHER , On Guichard's nets and Cyclic systems, a preprint.

FUKUOKA 814-0180
JAPAN

E-mail address: suyama@*fukuoka-u.ac.jp*